

Algebra Lineare e Geometria
Fac-simile di esame (tempo 2 ore)
Laurea in Astronomia

Nome e Cognome _____

Esercizio 1	Esercizio 2	Esercizio 3	Esercizio 4

1) Siano

$$S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : 2a_0 + a_1 + a_2 = 0\} \quad T = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : p(1) - p(0) = 2\}$$

due sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

- a) S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$? (4 pts)
- b) Per gli insiemi che lo sono trovarne una base e la dimensione. (3 pts)

2) Sia data, per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

- a) Per quali valori di k la funzione $f_{A_k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f_{A_k}(\mathbf{x}) = A_k \mathbf{x}$ è suriettiva? (3 pts)
- b) Siano $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x + 2y + kz + 3 = 0$ due piani di \mathbb{R}^3 , si descrivano le posizioni reciproche di questi due piani al variare di k . (3 pts)
- c) Sia $k = 1$, determinare $\ker f_{A_1}$. (2 pts)

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) A è diagonalizzabile? Se sì trovare una base di autovettori per A e una matrice diagonale simile ad A . (5 pts)

b) Scrivere la conica

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e dire a quale famiglia di coniche è congruente. (3 pti)

c) Sia

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire a quale famiglia di quadriche è congruente la quadrica definita da

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(2 pti)

4) Sia $z = -1 + i$.

- a) Trovare le radici terze di z . Esiste una circonferenza su cui giacciono? Se sì di che centro e di che raggio? (3 pti)
- b) Prese a caso due radici terze di z , quanto vale la norma del loro rapporto? (2 pti)